

## FUNCIÓN EXPONENCIAL

### Recomendaciones al Docente:

La actividad a proponer debe apuntar a que los alumnos puedan analizar los siguientes aspectos:

1. Cómo varía el gráfico de la función exponencial y de qué depende su monotonía.
- 2.Cuál es el dominio, recorrido de la función y las condiciones que debe cumplir la base  $a$ .
3. Los desplazamientos, dilataciones y contracciones de la función.

### Secuencia N°1:

1. Graficar la función  $f(x) = a^x$ 
  - a. Cambiar los valores de ' $a$ ' y observa la forma de las gráficas que resultan.
  - b. ¿Cuáles son las características de la función cuando ' $a$ ' es mayor que 1?
  - c. ¿Qué sucede cuando  $0 < a < 1$ ?
  - d. En particular, ¿qué se observa cuando  $a = 1$  y  $a = 0$ ? ¿Y en el caso en que ' $a$ ' sea negativo?Anota en tu cuaderno las conclusiones extraídas.
2. Graficar distintas funciones del tipo  $f(x) = k \cdot a^x$ .
  - a. Elegir un valor fijo para el parámetro ' $a$ ' (por ejemplo 2), modificar el valor de ' $k$ ' y observar la gráfica asociada a dichas funciones.
  - b. ¿Qué ocurre cuando  $k$  es mayor que 1?
  - c. ¿Qué sucede cuando  $0 < k < 1$ ? ¿Qué observas cuando  $k$  es negativo?Comprueba si tus conclusiones son válidas para otros valores de ' $a$ '.
3. Para cada una de las distintas  $f(x) = k \cdot a^x$  antes analizadas, responder:
  - a. ¿Cuál es el dominio? ¿Cuál es su conjunto imagen?
  - b. ¿Es creciente o decreciente?
  - c. ¿Tiene ceros o raíces? ¿Corta al eje  $x$ ?
4. Construir una tabla de doble entrada, resumiendo la forma de las gráficas que se pueden obtener combinando los valores de " $k$ " y " $a$ ".

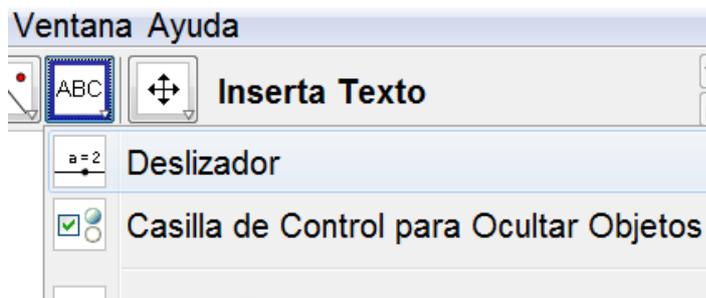
### Resolución con GeoGebra:

#### Ítem 1:

Para resolver estas actividades con GeoGebra, es posible utilizar lo que se llama "deslizadores".

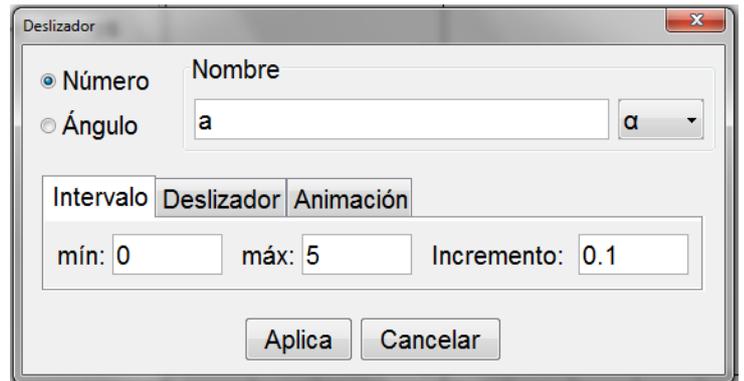
Abrir un archivo GeoGebra y crear un deslizador de la siguiente manera:

1. Elegir de la Barra de Herramientas: **Deslizador**



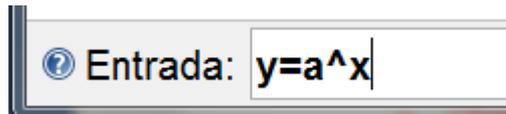
## Estudio de funciones exponenciales y logarítmicas

2. Hacer clic en cualquier parte de la Zona de Trabajo y aparece la siguiente ventana:

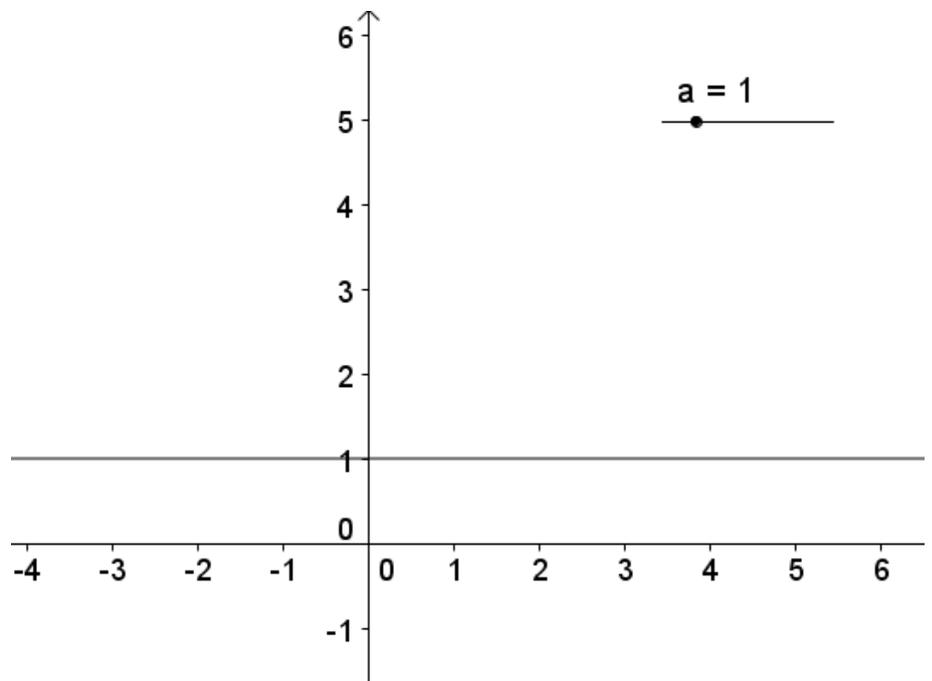


3. Elegir el intervalo sobre el cual vamos a trabajar para el parámetro a.

4. Escribir en la Entrada:



5. Aparece el deslizador en algún lugar de la Zona de Trabajo:



6. Teniendo apretado el botón derecho del mouse es posible mover el deslizador y analizar qué es lo que ocurre con la gráfica a medida que va cambiando los valores de "a".

7. Desde el menú contextual, ubicados con el mouse sobre el deslizador, clicar la opción "Animación Automática", la cual permite animar automáticamente el deslizador.



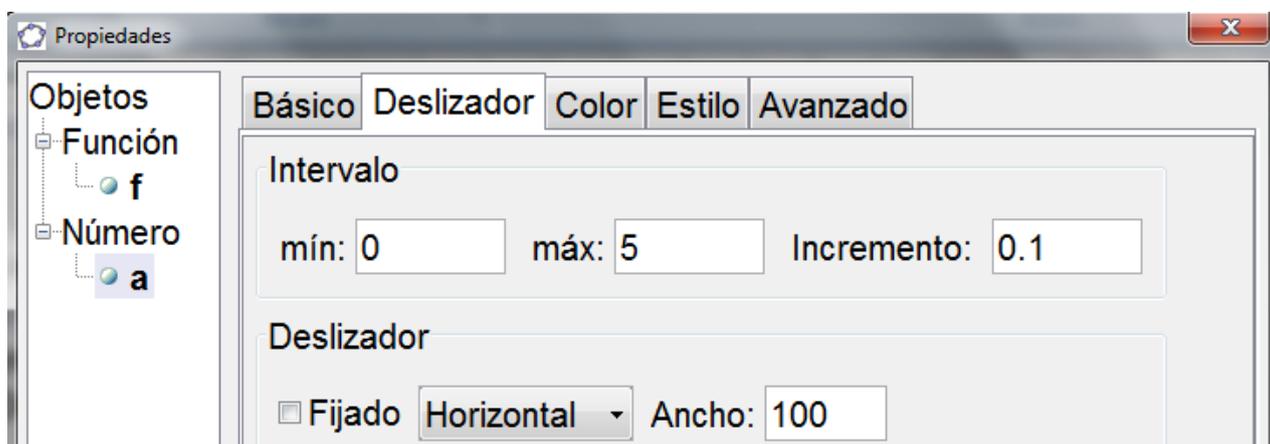
## Estudio de funciones exponenciales y logarítmicas

8. Es posible modificar el intervalo de los valores del deslizador para estudiar qué sucede si "a" es negativo.

Para ello, hacer clic con el botón derecho sobre el deslizador y seleccionar **Propiedades...**



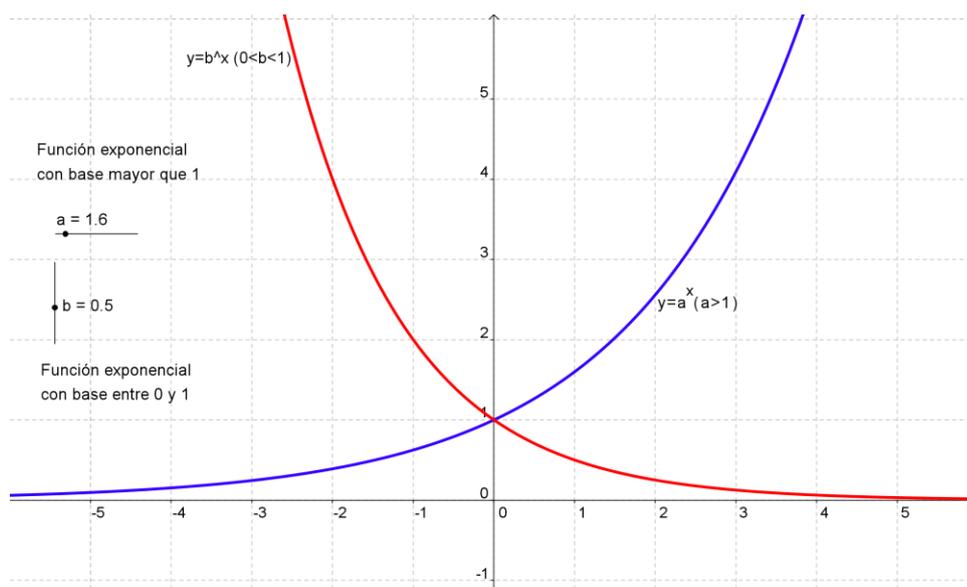
9. Se abre la siguiente ventana, en la cual es posible modificar los valores del deslizador y poner en posición horizontal o vertical el deslizador.



### VARIANTE:

Es posible construir dos deslizadores para estudiar por separado:

- $y = a^x$  con distintos valores de "a" mayores que 1
- $y = b^x$  con distintos valores de "b" entre 0 y 1.



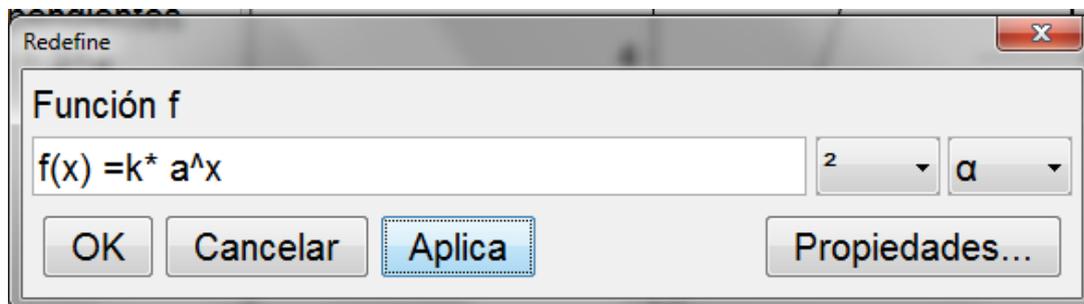
Para incluir el segundo deslizador, procedemos de la misma manera.

## Estudio de funciones exponenciales y logarítmicas

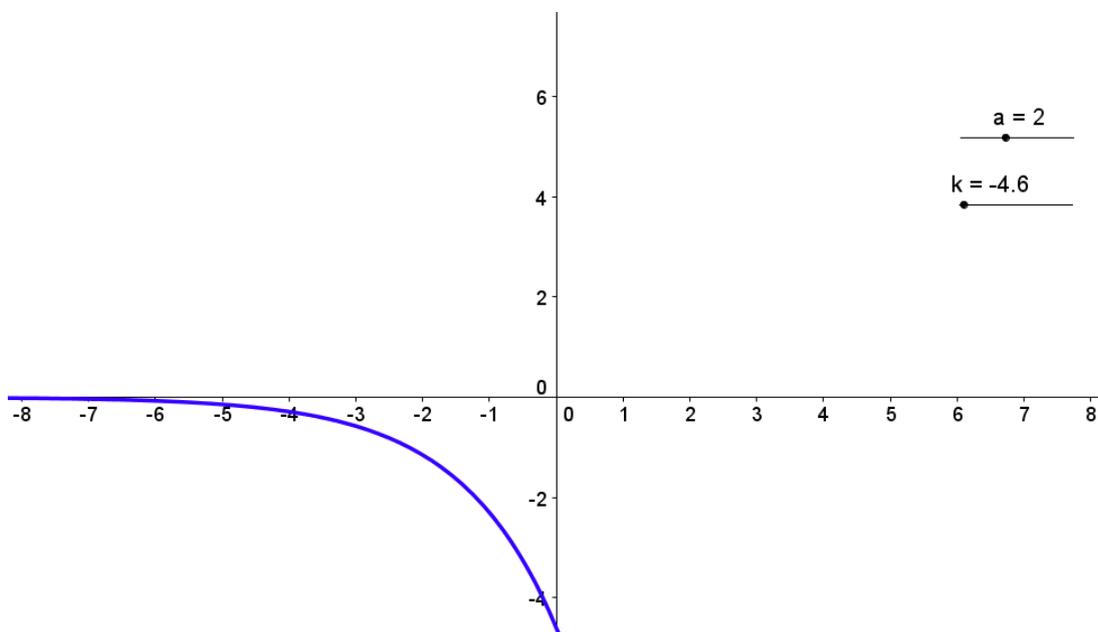
### Ítem 2 y 3:

Para realizar esta actividad, creamos un deslizador para el factor "k" entre -5 y 5.

10. Modificar la función representada. Hacer clic con el botón derecho sobre la expresión que aparece en la Barra Algebraica.



11. Es posible, dejando fijo el deslizador "a" en 2, estudiar las consignas:
  - a. ...modificar el valor de 'k' y observar la gráfica asociada a dichas funciones.
  - b. ¿Qué ocurre cuando **k es mayor que 1**?
  - c. ¿Qué sucede cuando **0 < k < 1**? ¿Qué observas cuando **k es negativo**? Comprueba si tus conclusiones son válidas para otros valores de 'a'.
12. Utilizar la opción **Animación automática** del menú contextual.



A partir de esta gráfica es posible responder las demás actividades, e inclusive capturar las pantallas con las gráficas que permiten realizar la actividad:

### Ítem 4:

Construir una tabla de doble entrada, resumiendo la forma de las gráficas que se pueden obtener combinando los valores de "k" y "a".

### FUNCIÓN LOGARÍTMO:

#### Recomendaciones al Docente:

La actividad a proponer debe apuntar a que los alumnos puedan analizar los siguientes aspectos:

1. Cómo se define la función logaritmo.
2. Cómo es el gráfico de la función logaritmo y de qué depende su monotonía.
- 3.Cuál es el dominio y recorrido de la función logaritmo  $f(x) = \log_a(x)$  y las condiciones que debe cumplir la base  $a$ .
4. La relación existente entre las funciones logaritmo y exponenciales de la misma base.

#### Secuencia N°2:

Estudiar para la gráfica de cada una de las funciones logarítmicas siguientes y responder:

- ¿Cuál es el dominio? ¿Cuál es su conjunto imagen?
- ¿Es creciente o decreciente?
- ¿Tiene ceros o raíces? ¿Corta al eje  $x$ ?

#### 1. Graficar la función $f(x) = \log_a(x)$

- a. Cambiar los valores de ' $a$ ' y observa la forma de las gráficas que resultan.
- b. ¿Cuáles son las características de la función cuando ' $a$  es mayor que 1'?
- c. ¿Qué sucede cuando  $0 < a < 1$ ?
- d. En particular, ¿qué se observa cuando  $a = 1$  y  $a = 0$ ? ¿Y en el caso en que ' $a$  sea negativo'?

Anota en tu cuaderno las conclusiones extraídas.

#### 2. Graficar distintas funciones del tipo " $f(x) \pm k$ ".

- a. Elegir un valor fijo para el parámetro ' $a$ ' (por ejemplo 2), modificar el valor de ' $k$ ' y observar la gráfica asociada a dichas funciones.
- b. ¿Qué ocurre cuando sumamos un número  $k$ ? ¿Y si restamos? Comprueba si tus conclusiones son válidas para otros valores de ' $a$ '.

#### 3. Comparar $f(x) = \log_a(x)$ con " $k \cdot f(x)$ " y responder:

- a. ¿Qué ocurre con la gráfica si  $k = -1$ ?
- b. ¿Y si la multiplicamos por una constante  $k$  distinta de  $-1$ ?

#### 4. Estudiar qué ocurre si sumamos o restamos una constante a la variable independiente " $f(x \pm k)$ "

---

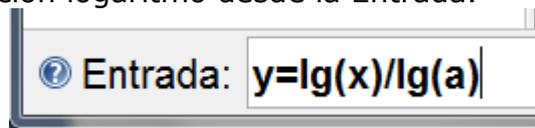
### Resolución con GeoGebra:

#### Ítem 1:

Para indicarle a Geogebra que represente  $f(x) = \log_a(x)$  es preciso antes de plantear esta actividad, proponer a los alumnos que investiguen el modo de calcular un logaritmo en otra base que no sea **base 10** y **base e** aplicando propiedades conocidas (se escribe la relación anterior en la forma de potencias equivalente  $a^{f(x)} = x$  y se utiliza los logaritmos de base conocida).

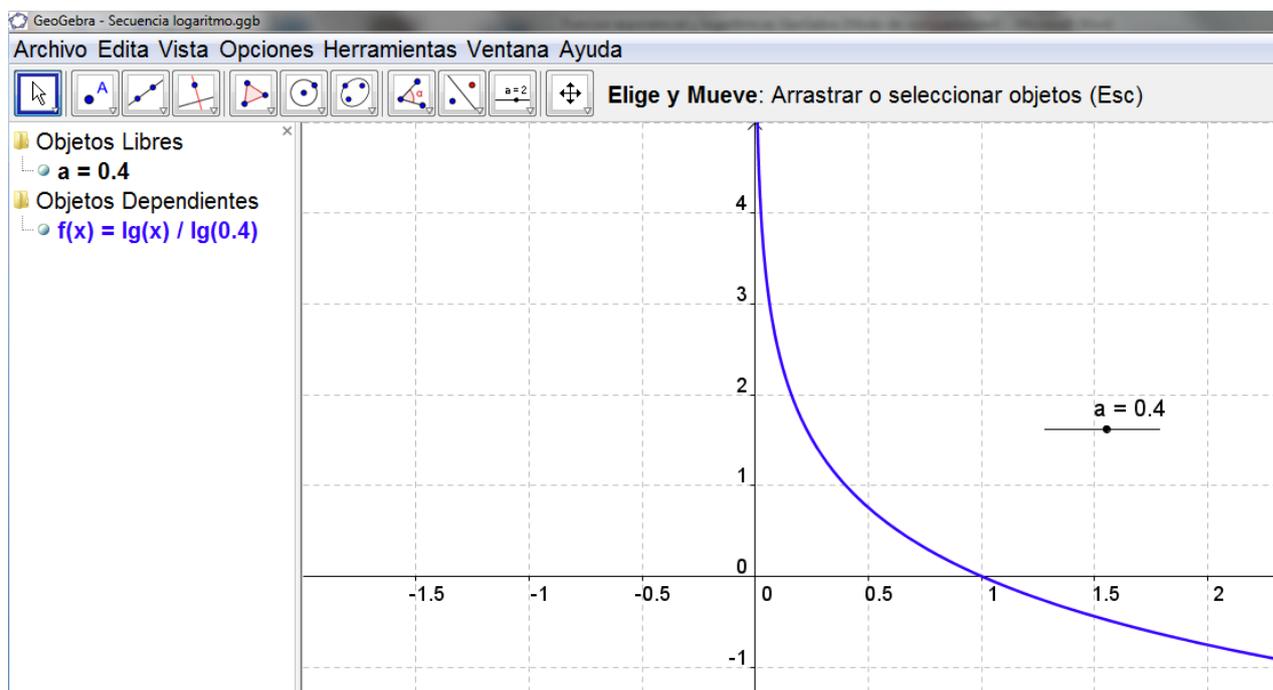
## Estudio de funciones exponenciales y logarítmicas

Para estudiar qué sucede para cada una de las posibilidades de valores de  $a$  se puede crear un deslizador con valores entre  $-5$  y  $5$ , por ejemplo. Luego, se ingresa la función logaritmo desde la Entrada.



Es posible al mover el deslizador, estudiar lo que ocurre con la función logaritmo  $f(x) = \log_a(x)$  cuando se modifica el valor de la base " $a$ ":

- Excluir a los números negativos, al número cero y al número uno como posibles bases del logaritmo.
- La monotonía de la función:
  - a. Modelo logarítmico DECRECIENTE si  $0 < a < 1$
  - b. Modelo logarítmico CRECIENTE  $a > 1$
- Dominio: la función logaritmo "permite" sólo valores positivos en  $x$ , independiente del valor de la base " $a$ ".
- Recorrido: para la función logaritmo corresponden todos los reales.
- Siempre la gráfica corta al eje  $x$  en el punto  $(1,0)$ . No corta al eje  $y$ .



De la misma manera, se crea un nuevo deslizador para el parámetro " $k$ " y se introducen cada una de las funciones propuestas en los ítems 2, 3 y 4. Por ejemplo para el ítem 2:



Y se procede a estudiar que ocurre con la gráfica de la función para:

- a. Elegir un valor fijo para el parámetro ' $a$ ' (por ejemplo 2), modificar el valor de ' $k$ ' y observar la gráfica asociada a dichas funciones.
- b. ¿Qué ocurre cuando sumamos un número  $k$ ? ¿Y si restamos? Comprueba si tus conclusiones son válidas para otros valores de ' $a$ '.

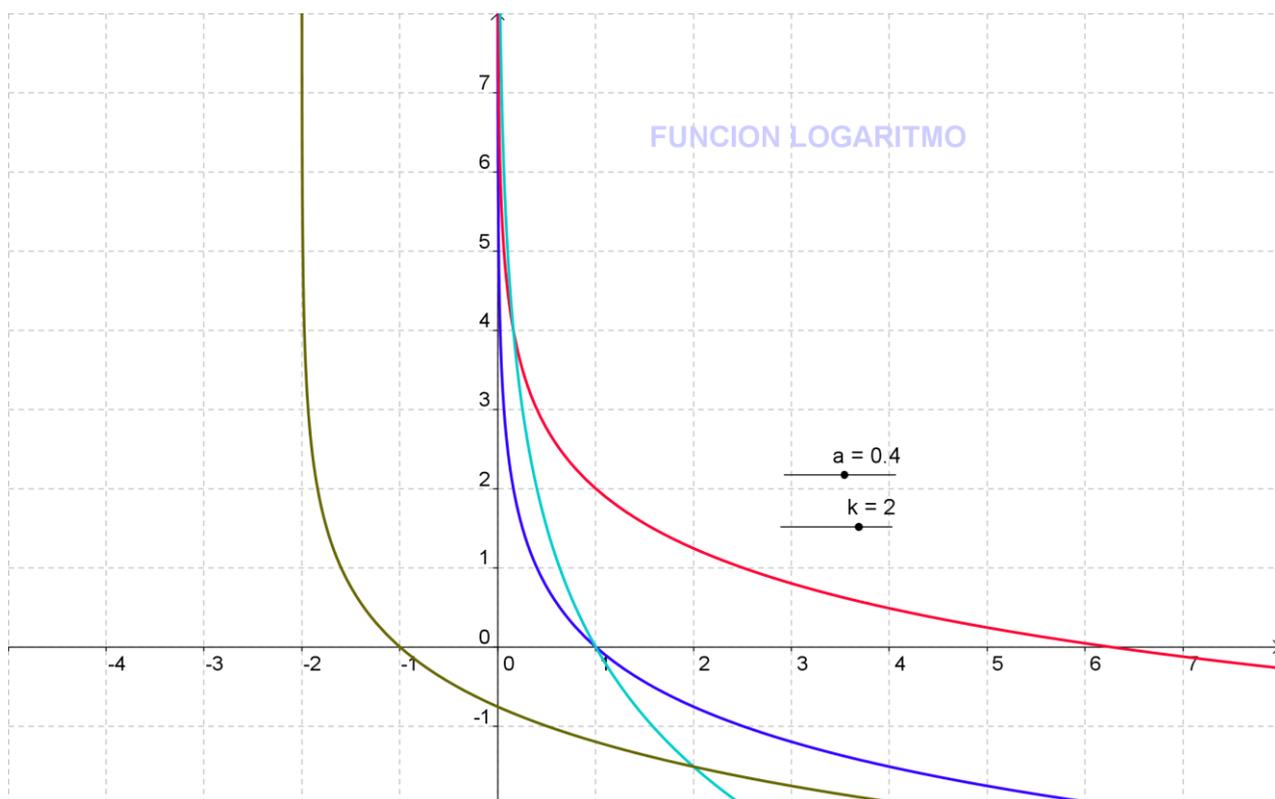
## Estudio de funciones exponenciales y logarítmicas

Lo mismo para el ítem 3 y 4:

Entrada:  $h(x)=k*f(x)$

Entrada:  $m(x)=f(x+k)$

Se obtienen las distintas gráficas, con las cuales es posible estudiar monotonía, desplazamientos, ceros, desplazamientos horizontales y verticales, dilataciones y contacciones, dominios y recorridos para cada una de las funciones.



### **FUNCIONES INVERSAS**

Para analizar que las funciones exponencial y logarítmica son funciones inversas, es posible representarlas en un mismo sistema de coordenadas y establecer desde el punto de vista funcional, que sus gráficos son simétricos respecto a la recta  $y=x$ , característica que cumplen las funciones inversas.

Para ello procedemos en GeoGebra de la siguiente manera:

En primer lugar crear un deslizador "b", número comprendido entre 0 y 10 con incremento 0,01.

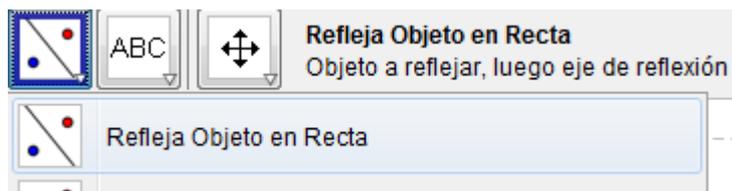
Luego se grafica  $f(x)=b^x$  ingresándola por entrada y la función identidad  $y=x$ .

Para determinar la curva simétrica, identificamos puntos en la exponencial desde:



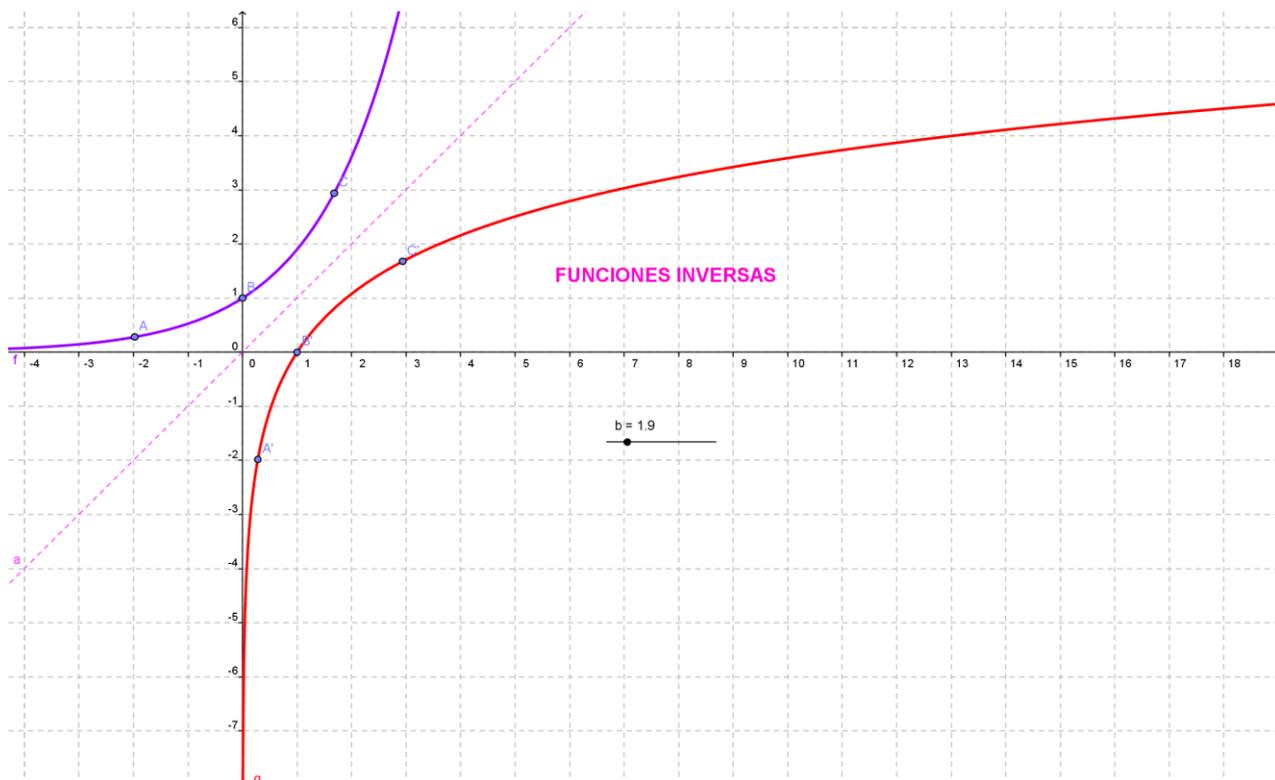
## Estudio de funciones exponenciales y logarítmicas

Luego obtenemos los simétricos  $B'$ ,  $A'$  y  $C'$  desde:



A esos tres puntos le aplicamos el **AjusteLog**, donde de acuerdo a la sintaxis se ingresa los tres puntos encerrados entre llaves y separados por comas y se obtiene el grafico de la función logarítmica (ojo con los `)`).

Entrada: `AjusteLog[{A',B',C'}]`



Es bueno aprovechar el modelo logarítmico que propone GeoGebra, el cual varía de acuerdo al valor que toma la base "b" de la función exponencial.

### VARIANTE:

Se pueden ocultar la exponencial y la función identidad y solo dejar la logarítmica para analizar lo que sucede al variar la base en un rango comprendido entre 0 y 10, por ejemplo.

